I - Pendule pas si simple

I.1 - Position du problème

1) En coordonnées polaires et avec une longueur L constante, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= L\,\vec{e}_r \\ \vec{v} &= L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= -L\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

2) On a :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y &= \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r\end{aligned}}$$

I.2 - Bilan des forces

3) Le poids vaut :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= mg\,\vec{e}_x \\ &= mg\,(\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

La force de rappel élastique du ressort ❶ vaut :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= k\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{e}_y \\ &= k\,(a - L\sin(\theta) - \ell_0)\,(\cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r)\end{aligned}$$

La force de rappel élastique du ressort ❷ vaut :

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= -k\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\vec{e}_y \\ &= -k\,(a + L\sin(\theta) - \ell_0)\,(\cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r)\end{aligned}$$

La tension de la tige :

$$\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$$

Au bilan :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{P} &= mg\,(\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta) \\ \vec{F}_1 &= k\,(a - L\sin(\theta) - \ell_0)\,(\sin(\theta)\,\vec{e}_r + \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta) \\ \vec{F}_2 &= -k\,(a + L\sin(\theta) - \ell_0)\,(\sin(\theta)\,\vec{e}_r + \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta) \\ \vec{T} &= -T\,\vec{e}_r\end{aligned}}$$

4) On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette sur chaque axe.

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) + k\,(a - L\sin(\theta) - \ell_0)\sin(\theta) - k\,(a + L\sin(\theta) - \ell_0)\sin(\theta) - T \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + k\,(a - L\sin(\theta) - \ell_0)\cos(\theta) - k\,(a + L\sin(\theta) - \ell_0)\cos(\theta) \end{cases}$$

L'équation du mouvement est la deuxième équation. En simplifiant l'expression, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$mL\ddot{\theta} + (mg + 2kL\cos(\theta))\,\sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2k}{m}(\cos(\theta) + \beta)\sin(\theta) = 0}$$

5) À l'équilibre, l'accélération angulaire est nulle : $\ddot{\theta} = 0$. Ainsi,

$$\frac{2k}{m}(\cos(\theta)+\beta)\sin(\theta)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\sin(\theta)=0\\ \cos(\theta)+\beta=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\theta_1=0\\ \theta_2=\pi\\ \cos(\theta_\pm)=-\beta\end{array}}$$

Les positions θ_1 et θ_2 existent toujours.

Les positions $\theta_\pm$ existent uniquement si $\boxed{\beta<1}$ car un cosinus est, en valeur absolue, toujours inférieur à 1.

I.3 - Résolution numérique

6) Code Python :

```
16 def derivee(y, t):
17     dydt = [y[1], -2*k/m*(np.cos(y[0])+β)*np.sin(y[0])]
18     return dydt
19
20 CI = [np.pi/2, 0]
21 sol = odeint(derivee, CI, t)
```

I.4 - Étude énergétique

7) Seule la tension de la tige n'est pas conservative. En revanche, cette force de travaille pas puisque sa puissance est nulle :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{T})=\vec{T}\cdot\vec{v}=-T\,\vec{e}_r\cdot\,L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=0}$$

8) L'énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{pp} &= mgy\\ &= -mgL\cos(\theta)\end{aligned}$$

L'énergie potentielle de la force de rappel élastique du ressort ❶ vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,el1} &= \frac{1}{2}k\,(\ell_1(t)-\ell_0)^2\\ &= \frac{1}{2}k\,(a-L\sin(\theta)-\ell_0)^2\end{aligned}$$

L'énergie potentielle de la force de rappel élastique du ressort ❷ vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,el2} &= \frac{1}{2}k\,(\ell_2(t)-\ell_0)^2\\ &= \frac{1}{2}k\,(a+L\sin(\theta)-\ell_0)^2\end{aligned}$$

Au bilan :

$$\boxed{\mathcal{E}_p^{tot}(\theta)=-mgL\cos(\theta)+\frac{1}{2}k\,(a-L\sin(\theta)-\ell_0)^2+\frac{1}{2}k\,(a+L\sin(\theta)-\ell_0)^2}$$

9) Le théorème de la puissance mécanique donne donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \sum\mathcal{P}_{nc}=\mathcal{P}(\vec{T})=0\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2-mgL\cos(\theta)+\frac{1}{2}k\,(a-L\sin(\theta)-\ell_0)^2+\frac{1}{2}k\,(a+L\sin(\theta)-\ell_0)^2\right)\\ &= mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgL\dot{\theta}\sin(\theta)+k\left(-L\dot{\theta}\cos(\theta)\right)(a-L\sin(\theta)-\ell_0)+k\left(L\dot{\theta}\cos(\theta)\right)(a+L\sin(\theta)-\ell_0)\\ &= mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgL\dot{\theta}\sin(\theta)+2kL^2\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

En simplifiant l'expression par $mL^2\dot{\theta}$, on retrouve bien l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{2k}{m}(\cos(\theta)+\beta)\sin(\theta)=0}$$

10) On a :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta} &= mgL\sin(\theta) + k\,(-L\cos(\theta))(a - L\sin(\theta) - \ell_0) + k\,(L\cos(\theta))(a + L\sin(\theta) - \ell_0)\\ &= mL^2\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\cos(\theta)\right)\sin(\theta)\\ &= \boxed{2kL^2(\cos(\theta) + \beta)\sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta^2} &= 2kL^2[-\sin^2(\theta) + (\cos(\theta) + \beta)\cos(\theta)]\\ &= 2kL^2[\beta\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]\\ &= \boxed{2kL^2[\,\beta\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1\,]}\end{aligned}$$

11) On retrouve bien les positions d'équilibre :

$$\frac{d\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta} = 0 = \frac{2k}{m}(\cos(\theta) + \beta)\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\sin(\theta) = 0\\ \cos(\theta) + \beta = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\theta_1 = 0\\ \theta_2 = \pi\\ \cos(\theta_\pm) = -\beta\end{array}}$$

Pour étudier la stabilité des positions d'équilibre, il faut déterminer le signe de $\frac{d^2\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta^2}(\theta_{eq})$.

- Cas où $\theta = \theta_1 = 0$

$$\boxed{\frac{d^2\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta^2}(0) = 2kL^2(\beta + 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{équilibre stable}}$$

- Cas où $\theta = \theta_2 = \pi$

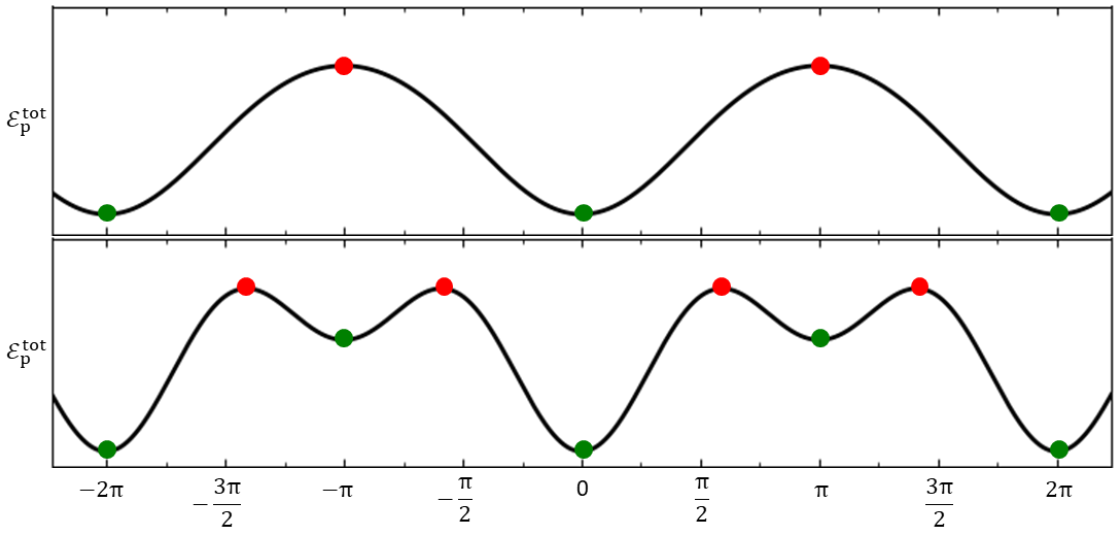
$$\boxed{\frac{d^2\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta^2}(\pi) = 2kL^2(1 - \beta) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\text{équilibre stable si } \beta < 1\\ \text{équilibre instable si } \beta > 1\end{cases}}$$

- Cas où $\cos(\theta_\pm) = -\beta$

Rappel : cette position d'équilibre existe uniquement si $\beta < 1$.

$$\boxed{\frac{d^2\mathcal{E}_p^{tot}}{d\theta^2}(\theta_\pm) = 2kL^2(-\beta^2 + 2\beta^2 - 1) = 2kL^2(\beta^2 - 1) < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{équilibre instable car } \beta < 1}$$

12) En rouge : instable. En vert : stable.



I.5 - Étude du système au voisinage des positions d'équilibre

13) Dans cette question, on pose : $\boxed{\theta = 0 + \varepsilon = \varepsilon}$

Linéarisons le sinus et le cosinus à l'aide de la formule de Taylor.

$$\boxed{\cos(\theta) \simeq \cos(0) - \varepsilon \sin(0) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) \simeq \sin(0) + \varepsilon \cos(0) = \varepsilon}$$

De plus, on a : $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$.

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \, \varepsilon = 0} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}(1+\beta)}}$$

14) On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Forme générale de la solution :

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

15) Dans cette question, on pose : $\boxed{\theta = \pi + \varepsilon}$

Linéarisons le sinus et le cosinus.

$$\boxed{\cos(\theta) \simeq \cos(\pi) - \varepsilon \sin(\pi) = -1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) \simeq \sin(\pi) + \varepsilon \cos(\pi) = -\varepsilon}$$

De plus, on a : $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$.

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{2k}{m}(-1+\beta)\,\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varepsilon} \pm \omega_1^2 \, \varepsilon = 0} \quad \text{avec :} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}|1-\beta|}$$

16) Si $\beta > 1$, la forme générale de la solution est :

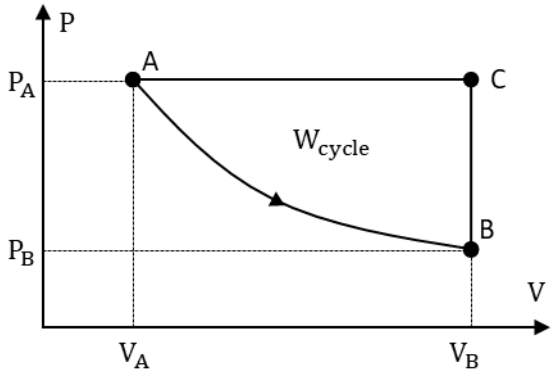
$$\varepsilon(t) = A\,\mathrm{ch}(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sh}(\omega_1 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta(t) = \pi + A\,\mathrm{ch}(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sh}(\omega_1 t)}$$

---------- Fin de la partie I ----------

II - Transformations thermodynamiques

II.1 - Transformation cyclique d'un gaz parfait

17)



18) On a :

	A	B	C
T (K)	293	293	$1{,}17 \times 10^3$
V(L)	12,5	50,0	50,0
P (bar)	1,95	0,487	1,95

19) Transformation AB :

$$W_{AB} = -\int P\,dV = -\int nRT_A \frac{dV}{V} = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \boxed{-3{,}38\ \text{kJ}}$$

$$\Delta U_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = -W_{AB} = \boxed{3{,}38\ \text{kJ}}$$

Transformation BC :

$$W_{BC} = 0$$

$$\Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) = \boxed{Q_{BC} = 18{,}2\ \text{kJ}}$$

Transformation CA :

$$W_{CA} = -\int P\,dV = -P_A(V_A - V_C) = \boxed{7{,}31\ \text{kJ}}$$

$$\Delta \text{H}_{\text{CA}} = \text{Q}_{\text{CA}} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_A - T_C) = \boxed{-25{,}5\ \text{kJ}}$$

20) On a :

$$\boxed{W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 3{,}93\ \text{kJ}} \quad et \quad \boxed{Q_{cycle} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = -3{,}93\ \text{kJ}}$$

C'est un récepteur car : $W_{cycle} > 0$.

21) On a :

$$\boxed{\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0}$$

C'est normal c'est une fonction d'état, donc sa variation sur un cycle est nulle.

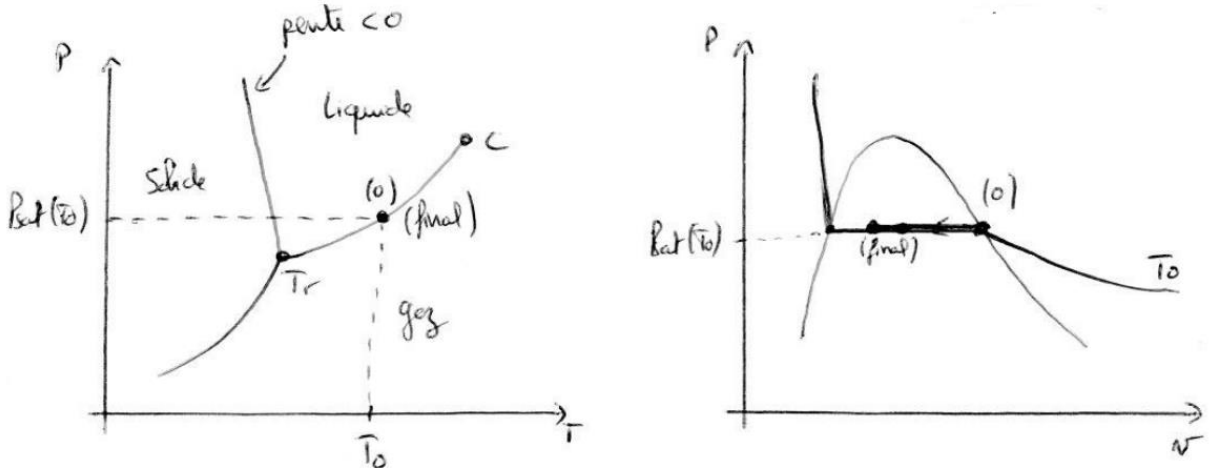
II.2 - Détente isotherme d'un mélange de deux corps purs

22) Dans l'état de vapeur saturante : $\boxed{P_{E,0} = P_{sat} = 0{,}2\ \text{bar}}$

23) Loi d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{V_0 = \frac{n_E RT_0}{P_{sat}} = 4{,}15 \times 10^{-2}\ \text{m}^3 = 41{,}5\ \text{L}}$$

24)



25) Puisque l'on néglige le volume de la phase liquide et que l'on divise par 2 le volume de la phase gazeuse (à pression et température constante car mélange L/G), alors la quantité de matière en phase gazeuse est divisée par 2 entre l'état initial et l'état final. Or initialement $100\ \%$ de la masse d'eau était sous forme gazeuse. Dans l'état final il n'y en a plus que $\boxed{x_{final} = 50\ \%}$.

26) La pression étant constante :

$$\boxed{W = -P_{sat}\int dV = -P_{sat}\left(\frac{V_0}{2} - V_0\right) = \frac{P_{sat}V_0}{2} = 415\ \text{J}}$$

27) Pour avoir de la vapeur sèche, il faut que : $\boxed{P_{eau} < P_{sat}}$

Or,

$$\boxed{P_{eau} = x_{eau}\,P_{tot,1} = \frac{n_{eau}}{n_{eau} + n_{N_2}}\,P_{tot,1} = 0{,}225\ \text{bar} > 0{,}200\ \text{bar} = \text{P}_{\text{sat}}}$$

L'eau est donc sou forme de vapeur saturante.

28) On a :

$$\boxed{P_{N_2,1} = P_{tot,1} - P_{eau} = P_{tot,1} - P_{sat} = 0{,}100\ \text{bar}}$$

29) On en déduit :

$$\boxed{V_1 = \frac{n_{N_2}RT_0}{P_{N_2,1}} = 27{,}7\ \text{L}}$$

30) On en déduit la quantité d'eau en phase vapeur, puis en phase liquide :

$$\boxed{n_{E,vap,1} = \frac{P_{sat}V_1}{RT_0} = 0{,}200\ \text{mol} \quad \Rightarrow \quad n_{E,liq,1} = n_E - n_{E,liq,1} = 0{,}100\ \text{mol}}$$

31) On remarque que :

$$P_{tot,2} = P_{N_2} + P_{eau} = P_{sat} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{eau} < P_{sat}}$$

La vapeur d'eau est donc sèche.

II.3 - Transformation polytropique

32) Système : {gaz + piston + cyclindre}.Lors d'une transformation infinitésimale :

$$\delta W_{fp} = -P_{ext}dV = -PdV$$

$$\delta Q = 0 \text{ car parois calorifugées}$$

$$dU = dU_{gaz} + dU_{piston+cylindre} = n\,C_{Vm}\,dT + C\,dT$$

Le premier principe donne donc :

$$dU = \delta W_{fp} + \delta Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{(C + nC_{Vm})dT + PdV = 0}$$

33) On a, au premier ordre :

$$(P + dP)(V + dV) = nR(T + dT) \quad \Rightarrow \quad \boxed{PdV + VdP = nRdT}$$

34) On isole dT dans les 2 relations précédentes :

$$dT = \frac{PdV + VdP}{nR} = -\frac{PdV}{C + nC_{Vm}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{nR} + \frac{1}{C + nC_{Vm}}\right)PdV + \frac{VdP}{nR} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(1 + \frac{nR}{C + nC_{Vm}}\right)\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0}$$

On identifie alors : $\boxed{k = 1 + \frac{nR}{C+nC_{Vm}} = 1 + \frac{nR}{C+\frac{nR}{\gamma-1}}}$

35) On a immédiatement :

$$k\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(V^kP\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V^kP = cte}$$

36) Si $C \to \infty$, alors $\boxed{k = 1}$, donc $\boxed{T = cte}$. Transformation isotherme.

37) Si $C \to 0$, alors $\boxed{k = \gamma}$. Montrons alors que $\Delta U = W$ (donc adiabatique). On pose $A = PV^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

$$W = -\int P\, dV = -A \int \frac{dV}{V^{\gamma}} = A\left(\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-\gamma} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

CQFD

38) Loi d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 24{,}3\ \text{L}}$$

39) On a :

$$P_1 V_1^k = P_2 V_2^k \quad \Rightarrow \quad P_1 \left(\frac{nRT_1}{P_1}\right)^k = P_2 \left(\frac{nRT_2}{P_2}\right)^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-k}{k}} = 498\ \text{K}}$$

Loi d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = 4{,}14\ \text{L}}$$

40) Comme la Q37 en remplaçant γ par k :

$$\boxed{W = \frac{nR}{k - 1}(T_2 - T_1) = 5{,}70\ \text{kJ}}$$

41) On en déduit :

$$\boxed{Q = \Delta U - W = nR(T_2 - T_1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1}\right) = -1{,}43\ \text{kJ}}$$

---------- Fin de la partie II ----------